第3講　複素数と2次方程式

§1　複素数とその計算

要点整理 と 公式

要点1　数の範囲の拡張と虚数単位

2次方程式 $x^2 = 3$ は，有理数の範囲では解をもたない。しかし，その範囲を実数まで広げると，$x = \pm\sqrt{3}$ という無理数の解をもつ。

x が実数のとき，$x^2 \geqq 0$ である。よって，2次方程式 $x^2 = -3$ は，実数の範囲では解をもたないことがわかる。

ここでは，2次方程式が常に解をもつように，数の範囲をさらに拡張する。

2乗して-1になる新しい数を考え、その数を文字「　　」で表す。つまり

$i^2 = -1$

とする。この i を「虚数(きょすう)単位」という。これを定義することで，負の数の平方根，つまり「2乗すると負の数」になる数を扱うことができるようになる。

要点2　複素数

「複素数」… a，b を実数として，$a + bi$ の形で表される数。

a を「実部」，b を「虚部」という。

(ex) $3 - 4i$ の実部は「　　」，虚部は「　　」

虚部 $b = 0$ のとき，複素数 $a + bi$ は実部 a だけとなり，これは実数を表している。

虚部 $b \neq 0$ のとき，複素数 $a + bi$ を「虚数」といい，さらに実部 $a = 0$ の数 bi を「純虚数」という。

〈複素数 $a + bi$〉

$b=0$	$b\neq0$
実数　a	虚数　$a+bi$ 純虚数　bi

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点3 複素数の相等と共役な複素数

2つの複素数が等しいのは，実部も虚部も等しいとき，と定める。

■ 複素数の相等

a，b，c，d が実数のとき

$a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$

とくに，$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

虚部の符号だけが異なる2つの複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を，互いに「共役(きょうやく)な複素数」という。実数 a と共役な複素数は a である。

※虚数を扱うときは，数の大小関係や正・負は考えない。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の計算をせよ。

（1）　$(3+2i)-(2-4i)$　　（2）　i^3+i^2+i+1　　（3）　$(2+i)(3-5i)$

［2］　次の式を計算し，$a+bi$ の形で表せ。

（1）　$\dfrac{4}{2+3i}$　　（2）　$\dfrac{2i}{1-i}$

Point Pickup

複素数の加法，減法，乗法

虚数単位 i を文字のように考えて計算する。

また，$i^2=$　　　を用いて式を簡単にする。

計算結果は $a+bi$ の形にする。

複素数の除法

分母と共役な複素数を分母，分子に掛けて，分母を実数にする。

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2-b^2(-1)=a^2+b^2$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 負の数の平方根と2次方程式

要点整理 と 公式

要点4 負の数の平方根

数の範囲を複素数まで広げると，負の数の平方根を考えることができる。

負の数-3の平方根は，「2乗して-3になる数」である。ここで，

$(\sqrt{3}\,i)^2=(\sqrt{3})^2 i^2=$　　　　　　　，$(-\sqrt{3}\,i)^2=(-\sqrt{3})^2 i^2=$

より，$\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}\,i$ は負の数 -3 の平方根である。

一方で，正の数 a の平方根は，$\sqrt{a}$ と$-\sqrt{a}$ であるが，a が負のときにもこの表し方を適用すると，-3 の平方根は $\sqrt{-3}$と$-\sqrt{-3}$ と表すことができる。

よって，$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{-3}=-\sqrt{3}\,i$　と考えることができる。

$a>0$のとき，記号$\sqrt{-a}$ を$\sqrt{a}\,i$ と定めると，以下のことがいえる。

■ 負の数の平方根

$a>0$のとき

$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　　特に$\sqrt{-1}=i$

$-a$ の平方根は，$\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点5　2次方程式の解

ここでは，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ （a，b，c は実数）の解を，複素数の範囲で考える。

2次方程式 $x^2 = k$ の解は，k の正負に関係なく $x = \pm\sqrt{k}$ となる。

また，次の公式が，根号の中の正負を問わず成り立つ。

■ 2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

（ex）2次方程式 $2x^2 + 3x + 4 = 0$ の解は

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4} =$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］ 次の計算をせよ。

（1） $\sqrt{-2}\sqrt{-6}$　　（2） $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

［2］ 次の2次方程式を解け。

（1） $x^2 = -9$　　（2） $7x^2 - 2x + 1 = 0$

Point Pickup

負の数の平方根

$a > 0$ のとき　$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$　　（ex） $\sqrt{-2} =$

複素数の計算においては，$\sqrt{-a}$ を $\sqrt{a}\,i$ に書き換える作業を最優先に行う。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解法

① 左辺の因数分解を考える。

② $x^2 = k$　の解は，k の正負にかかわらず　$x = \pm\sqrt{k}$

③ 解の公式　$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

とくに，$ax^2 + 2b'x + c = 0$（x の係数が偶数）のときは，

公式　$x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$ を使うとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 2次方程式の解の判別

要点整理 と 公式

要点6　2次方程式の解の種類と判別式

方程式の解のうち，実数であるものを「　　　　　」，虚数であるものを「　　　　　」という。

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ である。

この解の種類は，根号の中の式 $b^2 - 4ac$ の符号によって次の 3 つに分類することができる。

① $b^2 - 4ac > 0$ のとき，異なる 2 つの　　　　解

② $b^2 - 4ac = 0$ のとき，ただ 1 つの　　　　解（「　　　　」）

③ $b^2 - 4ac < 0$ のとき，異なる 2 つの　　　　解

$b^2 - 4ac$を，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の「　　　　　」といい，記号「　　」で表す。

■ 2次方程式の解の種類の判別

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解について，$D = b^2 - 4ac$ とおくと以下。

$D > 0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ

$D = 0$ $\Longleftrightarrow$ ただ 1 つの実数解（重解）をもつ

$D < 0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

※ 2 次方程式の異なる2 つの虚数解は，互いに共役な複素数である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］　次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

(1)　$2x^2 - 3x + 4 = 0$　　(2)　$3x^2 + 4x - 1 = 0$

(3)　$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

［2］　2 次方程式 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ が実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の判別

$\Longrightarrow$　判別式 $D = b^2 - 4ac$　の符号を調べる。

$D > 0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ をもつ

$D = 0$ $\Longleftrightarrow$ 重解　$x = -\dfrac{b}{2a}$ をもつ

$D < 0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる2 つの虚数解　$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ をもつ

重解も実数より，$D \geqq 0$ $\Longleftrightarrow$ 実数解をもつ

2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の判別式

2 次方程式が $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の形のときは，

$\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$　　の符号を調べるとよい。

$D = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$

よって，D の符号と $\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$　の符号は一致する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ ２次方程式の解と係数の関係

要点整理 と 公式

要点 7　２次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

ここで，$\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とすると

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

よって，2 解の和 $\alpha+\beta$ と 2 解の積 $\alpha\beta$ はともに実数となり，

2 次方程式の係数 a，b，c で表される。

■ **２次方程式の解と係数の関係**

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を α，β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},\quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点8　2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α, β とするとき

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と変形できる。

■ 2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α, β とすると

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

(ex) x^2-4x+7 を複素数の範囲で因数分解する。

x^2-4x+7 の解は, $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-1\cdot7}}{1}=2\pm\sqrt{-3}=2\pm\sqrt{3}i$

よって, $x^2-4x+7=\{x-(\qquad\qquad)\}\{x-(\qquad\qquad)\}$

$=(x-2-\sqrt{3}i)(x-2+\sqrt{3}i)$

要点9　2数を解とする2次方程式

2数 α, β を2解にもつ2次方程式は

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \qquad (a\neq0)$$

の形で表される。このうち x^2 の係数 a が1のものは

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$　つまり $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ である。

よって, 次のことがいえる。

■ 2数 α, β を解とする2次方程式

2数 α, β を解とする2次方程式の1つは

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

[1]　2次方程式 $x^2 - x - 5 = 0$ の2解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha + \beta$　　(2)　$\alpha\beta$　　(3)　$\alpha^2 + \beta^2$　　(4)　$\alpha^3 + \beta^3$

[2]　次の2数を解にもつ2次方程式を1つ作れ。

(1)　$3,\ -2$　　(2)　$-1 + 4i,\ -1 - 4i$

Point Pickup

2次方程式の解と係数の関係

2次方程式　$ax^2 + bx + c = 0$　の2解を α，β とすると

$\alpha + \beta =$　　　，$\alpha\beta =$

対称式

$a^2 + b^2$ のように，文字を入れ替えても元の式と変わらない式のことを

「対称式」という。

2文字 a，b の「基本対称式」は 「$a + b$」，「ab」 である。

すべての対称式は，基本対称式のみで表すことができる。

$(a + b)^2 =$　　　　　　　より　$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$(a + b)^3 =$　　　　　　　　より

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

2数 α，β を2解にもつ2次方程式

2数 α，β を2解にもつ2次方程式の1つは，$p = \alpha + \beta$，$q = \alpha\beta$ とすると

$x^2 - px + q = 0$　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　確認テスト

1 次の計算をせよ。

(1) $(2+4i)-(1-i)=$ ア $+$ イ i

(2) $\dfrac{i}{2+i}=\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}+\dfrac{\text{オ}}{\text{エ}}i$

2 (1) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}=$ カキ である。

(2) 次の2次方程式を解け。

(i) $x^2=-3$　　$x=\pm\sqrt{\text{ク}}\,i$

(ii) $3x^2+2x+5=0$　　$x=\dfrac{-\text{ケ}\pm\sqrt{\text{コサ}}\,i}{3}$

3 2次方程式 $x^2-mx+2m-3=0$ が異なる2つの虚数解をもつとき，m のとりうる値の範囲は シ $< m <$ ス である。

4 2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の2解を α，β とするとき，$\alpha+\beta=$ セ，
$\alpha\beta=$ ソ，$\alpha^2+\beta^2=$ タチ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　複素数と２次方程式

1

［1］ (1) $(3+2i)-(2-4i)=3+2i-2+4i=(3-2)+(2+4)i=1+6i$

(2) $i^3+i^2+i+1=i^2\cdot i+i^2+i+1=-i-1+i+1=0$

(3) $(2+i)(3-5i)=6-10i+3i-5i^2=6-10i+3i-5\cdot(-1)$

$=6-10i+3i+5=11-7i$

［2］ (1) $\dfrac{4}{2+3i}=\dfrac{4(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{8-12i}{4-9i^2}=\dfrac{8-12i}{13}=\dfrac{8}{13}-\dfrac{12}{13}i$

(2) $\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i+2i^2}{1-i^2}=\dfrac{-2+2i}{2}=-1+i$

2

［1］ (1) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{6}\,i=\sqrt{12}\,i^2=-2\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i}=\dfrac{3}{i}=\dfrac{3i}{i^2}=-3i$

［2］ (1) $x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}\,i=\pm 3i$

(2) $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot7\cdot1}}{2\cdot7}=\dfrac{2\pm\sqrt{-24}}{14}=\dfrac{2\pm\sqrt{24}\,i}{14}=\dfrac{2\pm2\sqrt{6}\,i}{14}=\dfrac{1\pm\sqrt{6}\,i}{7}$

（別解）　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-7\cdot1}}{7}=\dfrac{1\pm\sqrt{-6}}{7}=\dfrac{1\pm\sqrt{6}\,i}{7}$

3

［1］ 判別式を D とする。

(1) $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot4=9-32=-23<0$　よって，異なる２つの虚数解をもつ

(2) $D=4^2-4\cdot3\cdot(-1)=16+12=28>0$　よって，異なる２つの実数解をもつ

(3) $D=(2\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot3=12-12=0$　よって，重解をもつ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［2］　判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1\cdot(a+2) = a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1)$$

実数解をもつための条件は $D \geqq 0$

つまり $(a-2)(a+1) \geqq 0$　よって　$a \leqq -1,\ 2 \leqq a$

4

［1］ (1)　解と係数の関係より $\alpha + \beta = 1$

(2)　解と係数の関係より $\alpha\beta = -5$

(3)　$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2\cdot(-5) = 1 + 10 = 11$

(4)　$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3\cdot(-5)\cdot 1 = 16$

［2］ (1)　2 数の和は　$3 + (-2) = 1$，積は　$3\cdot(-2) = -6$

よって求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2 - 1\cdot x - 6 = 0$　つまり　$x^2 - x - 6 = 0$

(2)　2 数の和は　$(-1+4i) + (-1-4i) = -2$，$(-1+4i)(-1-4i) = (-1)^2 - 16i^2 = 17$

よって求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2 - (-2)x + 17 = 0$

つまり　$x^2 + 2x + 17 = 0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　確認テスト

1 次の計算をせよ。

(1) $(2+4i)-(1-i)=$ [ア] $+$ [イ] i　　(2) $\dfrac{i}{2+i}=\dfrac{[ウ]}{[エ]}+\dfrac{[オ]}{[エ]}i$

2 (1) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}=$ [カキ] である。

(2) 次の2次方程式を解け。

(i) $x^2=-3$　　$x=\pm\sqrt{[ク]}\,i$

(ii) $3x^2+2x+5=0$　　$x=\dfrac{-[ケ]\pm\sqrt{[コサ]}\,i}{3}$

3 2次方程式 $x^2-mx+2m-3=0$ が異なる2つの虚数解をもつとき，m のとりうる値の範囲は [シ] $< m <$ [ス] である。

4 2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の2解を α，β とするとき，$\alpha+\beta=$ [セ]，$\alpha\beta=$ [ソ]，$\alpha^2+\beta^2=$ [タチ] である。

{解答}

1 (1) ア 1　イ 5　(2) ウ 1　エ 5　オ 2

2 (1) カ －　キ 6

(2) (i) ク 3　(ii) ケ 1　コ 1　サ 4

3 シ 2　ス 6

4 セ 3　ソ 5　タ －　チ 1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。